Contoh Penalaran Induktif dan Deduktif Menggunakan Kegiatan Bermain-main dengan Bilangan

Fadjar Shadiq
(fadjar_p3g@yahoo.com & www.fadjarp3g.wordpress.com)

Pengantar

Perhatikan tujuh perintah berikut.

1. Pilih suatu bilangan sembarang.
2. Tambah 3.
3. Kalikan dengan 2.
4. Kurangi dengan 4.
5. Bagi dengan 2.
6. Kurangi dengan bilangan yang anda pilih pada langkah 1.
7. Sebutkan hasilnya.

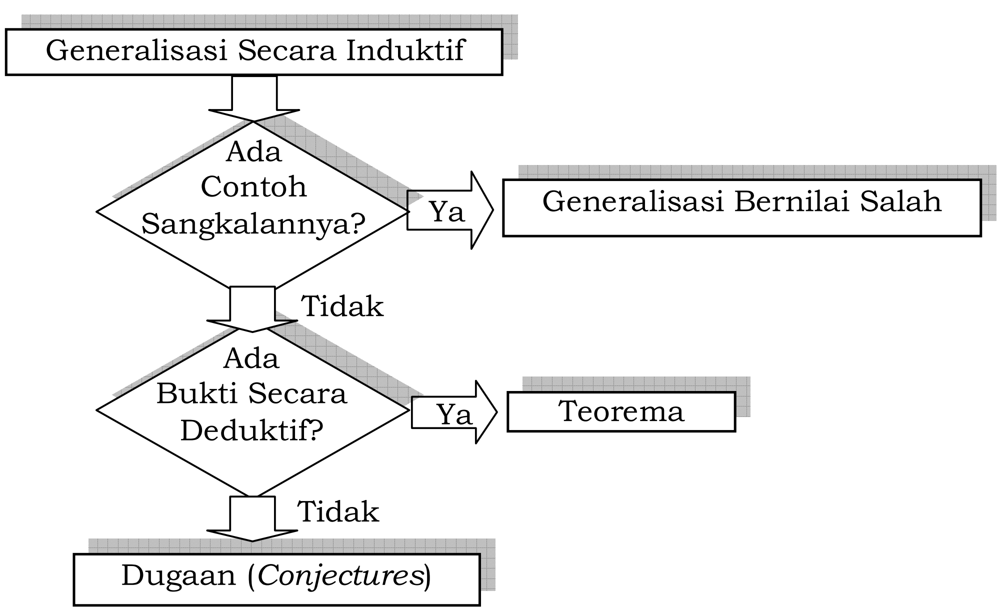
Perintah-perintah tesebut dapat saja diberikan kepada para siswa yang sedang belajar matematika yang dibagi dalam beberapa kelompok @ 4 orang. Setelah itu, mereka diminta untuk melaksanakan kegiatan sesuai perintah di atas sebagai bagian dari motivasi. Berhentilah membaca untuk beberapa saat. Cobalah untuk melakukan atau melaksanakan perintah pada tujuh langkah tersebut. Apa yang Anda dapatkan? Pada contoh 1, 2, 3, dan 4 di bawah ini, berturut-turut telah ditentukan bilangan 2, 7, 10, dan –2 sebagai bilangan sembarang yang dipilih pada langkah 1. Mengikuti ketujuh langkah di atas, didapatkan hasil pada setiap langkah dan ternyata hasil terakhirnya adalah sama, yaitu bilangan 1.

Langkah	Contoh 1	Contoh 2	Contoh 3	Contoh 4
1.	2	7	10	–2
2.	5	10	13	1
3.	10	20	26	2
4.	6	16	22	–2
5.	3	8	11	–1
6.	1	1	1	1
7.	“Satu”	“Satu”	“Satu”	“Satu”

Pertanyaan yang dapat diajukan adalah, apakah hasil terakhir berupa bilangan yang sama (yaitu bilangan 1) berlaku hanya untuk empat bilangan pada empat contoh di atas saja? Apakah hal yang sama akan berlaku juga untuk bilangan lainnya? Apakah hasil terakhir (yaitu 1) akan sama untuk n = 1.000.000 atau untuk n = 123.456.789 misalnya? Apakah hasil itu akan berlaku juga jika n merupakan bilangan bulat negatif yang lain, bilangan pecahan, maupun bilangan bentuk akar? Selanjutnya, pertanyaan yang mengusik para filusuf sehingga pertanyaan berikut ini merupakan pertanyaan yang sangat penting dan merupakan pertanyaan pamungkas yang berkait dengan proses pembuktian adalah:

1. Yakinkah Anda bahwa dengan empat, seribu, bahkan sejuta atau lebih contoh sudah cukup untuk menggeneralisasikan atau menyatakan bahwa hasilnya selalu 1?
2. Bagaimana jika ada satu atau dua bilangan di luar bilangan yang Anda pilih tersebut yang tidak menghasilkan bilangan 1 pada langkah terakhirnya sehingga cukup untuk menyatakan bahwa hasilnya tidak mesti berupa bilangan 1? Dalam matematika sendiri, contoh seperti itu dikenal dengan sebutan contoh sangkalan (*counter examples*).
3. Pada akhirnya, bagaimana meyakinkan diri Anda sendiri dan orang lain bahwa hasilnya selalu 1 untuk semua bilangan sembarang n?

Contoh dan penjelasan di atas menunjukkan bahwa empat contoh dan beberapa contoh lainnya dari Anda sendiri maupun dari orang lain tidak akan cukup untuk menunjukkan atau membuktikan bahwa hasilnya akan selalu 1 untuk semua atau untuk setiap bilangan sembarang n. Di dalam matematika, proses berpikir untuk sampai pada suatu kesimpulan seperti itu dikenal dengan istilah penalaran induktif (induksi). Jadi, jika para siswa (dan Anda) tidak mampu membuktikan suatu teorema, dalil, atau suatu rumus akan berlaku untuk semua nilai pada semestanya (secara deduktif) namun Anda juga tidak dapat menunjukkan kesalahan rumus tersebut melalui suatu contoh sangkalan, maka hasil tersebut disebut dengan dugaan (*conjectures*) dan belum terkategori sebagai suatu teorema, dalil, atau rumus (Shadiq, 2003); yang dapat digambarkan dengan diagram berikut.



Pentingnya Pembuktian Secara Deduktif

Pada intinya, pembuktian dengan penalaran induktif seperti ditunjukkan di atas belum dapat meyakinkan orang lain, termasuk para pembaca naskah ini bahwa rumus atau pernyataan tersebut akan benar untuk seluruh nilai n. Untuk itu, alternatif pembuktian secara deduktif akan dikomunikasikan seperti ditunjukkan dengan tabel di bawah ini. Langkah pertamanya adalah dengan memisalkan bilangan yang dipilih adalah x pada cara II dan suatu persegi pada cara I yang mewakili atau melambangkan suatu bilangan sembarang dari anggota semesta pembicaraannya.

Langkah/Perintah	Cara I	Cara II
1. Pilih suatu bilangan sembarang.	Dimisalkan bilangan yang dipilih adalah: □	Dimisalkan bilangan yang dipilih adalah x
2. Tambahkan 3.	□○○○	x + 3
3. Kalikan dengan 2 (dilipatduakan).	□○○○ □○○○	2(x + 3) = 2x + 6
4. Kurangi dengan 4.	□○ □○	2x + 2
5. Bagi dengan 2.	□○	x + 1
6. Kurangi dengan bilangan yang anda pilih semula.	○	1
7. Sebutkan hasilnya.	“Satu”	“Satu”

Jelaslah bahwa jika pada pembuktian secara induktif digunakan bilangan-bilangan dari anggota semestanya, maka pada pembuktian secara deduktif, langkah pertamanya adalah dengan memisalkan bilangan yang dipilih adalah berupa variabel x ataupun persegi yang dapat diganti oleh atau mewakili setiap anggota semestanya. Dengan cara seperti inilah, jika memang benar bahwa hasil terakhirnya adalah 1 maka dapat disimpulkan bahwa hasil terakhir berupa bilangan 1 tersebut akan berlaku untuk semua bilangan sembarang pada semesta pembicaraannya. Dengan mengikuti ketujuh langkah yang ditentukan, ternyata hasilnya 1, sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk semua bilangan sembarang yang dipilih, termasuk bilangan negatif, pecahan, dan bentuk akar, hasilnya akan selalu 1. Yang jelas, cara induktif akan membantu kita untuk melakukan kegiatan secara deduktif.

Pada pembuktian di atas, jelas juga akan pentingya penggunaan simbol x maupun bentuk aljabar lainnya untuk menggambarkan struktur dan situasi yang didapat pada setiap langkah. Di samping itu, para siswa dilatih dan difasilitasi menggunakan model matematika untuk menyatakan hasil pada setiap operasi yang dilakukan. Di samping itu, dapatlah disimpulkan juga bahwa penggunaan konsep dan teorema aljabar dalam pembuktian sangatlah penting karena dengan aljabar kita dapat menyatakan hubungan antar kuantitas, dapat memanfaatkan simbol (misalnya simbol x untuk mewakili sembarang bilangan), dapat menggunakannya untuk pemodelan matematika, dan dapat menggunakannya untuk mempelajari perubahan-perubahan yang terjadi pada variabelnya. Mengingat pembelajaran aljabar baru dimulai di jenjang SMP, maka pada cara I digunakan lambang persegi sebagai wakil dari bilangan yang dipilih pada langkah 1, sedangkan satu lingkaran menunjukkan atau menggambarkan bilangan 1. Cara ini dapat dilakukan untuk membantu siswa yang mahir dan berbakat matematika namun belum mengenal variabel.

Kekurangan Pembuktian Secara Induktif

Minta para siswa mengerjakan tugas berikut.

Jika ditentukan bahwa n merupakan bilangan asli, tunjukkan bahwa bentuk $n^2 - n + 11$ merupakan bilangan prima. Bagaimana cara untuk membuktikan atau menyangkalnya?

Untuk n = 1 maka bentuk $n^2 - n + 11$ bernilai $1^2 - 1 + 11 = 11$ yang merupakan bilangan prima. Jadi, terbukti benar bahwa bentuk $n^2 - n + 11$ merupakan bilangan prima untuk n = 1.

Untuk n = 2 maka bentuk $n^2 - n + 11$ bernilai $2^2 - 2 + 11 = 13$ yang merupakan bilangan prima. Jadi, terbukti benar bahwa bentuk $n^2 - n + 11$ merupakan bilangan prima untuk n = 2.

Untuk n = 3 maka bentuk $n^2 - n + 11$ bernilai $3^2 - 3 + 11 = 17$ yang merupakan bilangan prima juga. Jadi, terbukti benar bahwa bentuk $n^2 - n + 11$ merupakan bilangan prima untuk n = 3.

Hal yang sama akan terjadi, untuk n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Lalu, bagaimana hasil untuk n = 1.000.000 atau untuk n = 123.456.789 misalnya? Apakah nilai dari bentuk $n^2 - n + 11$ untuk kedua bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan prima juga? Sulit bukan? Bagaimana dengan bilangan yang lebih besar lagi? Sekali lagi, jika kita menggunakan pembuktian dengan induktif; bagaimana jika ada satu atau dua bilangan di luar bilangan yang Anda pilih tersebut yang tidak menghasilkan bilangan prima untuk bentuk $n^2 - n + 11$-nya? Kalau memang ada beberapa bilangan asli yang tidak menghasilkan bilangan prima; lalu bagaimana cara menemukan bilangan tersebut untuk menunjukkan bahwa ada beberapa bilangan asli n sebagai contoh sangkalan (*counter examples*) yang menyebabkan bentuk $n^2 - n + 11$ tidak menghasilkan bilangan prima? Inilah salah satu kelemahan mendasar dari pembuktian secara induktif.

Ternyata, pada bentuk $n^2 - n + 11$ di atas, untuk $n = 11$ maka bentuk $11^2 - 11 + 11$ bernilai 121 yang bukan merupakan bilangan prima. Jadi, bentuk $n^2 - n + 11$ tidak menghasilkan bilangan prima untuk $n = 11$. Secara umum dapat ditunjukkan bahwa untuk $n = 11$; maka bentuk $n^2 - n + 11$ menjadi:

$$\begin{aligned} n^2 - n + 11 &= 11^2 - 11 + 11 \\ &= 11(11 - 1 + 1) \\ &= 11 \times 11 \end{aligned}$$

Ternyata, untuk n = 22, 33, 44, 55, 66, 77, ... ; bentuk $n^2 - n + 11$ tidak menghasilkan bilangan prima. Jika lebih digeneralisasi, bentuk $n^2 - n + k$ misalnya, dapat dibuktikan tidak akan menghasilkan suatu bilangan prima untuk $n = pk$ dengan n, p dan k mewakili bilangan asli. Hal ini dapat ditunjukkan dengan bukti berikut.

Untuk $n = pk$ didapat.

$$\begin{aligned} n^2 - n + k &= p^2k^2 - pk + k \\ &= k \times (p^2k - p + 1) \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk $n = pk$; maka bentuk $n^2 - n + k = = k \times (p^2k - p + 1)$ memiliki faktor k; sehingga bentuk $n^2 - n + k$ untuk bilangan n tertentu tidak menghasilkan bilangan prima.

Implikasinya pada Pembelajaran

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin dan memajukan daya pikir manusia. Mata pelajaran matematika diberikan untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Kompetensi tersebut diperlukan agar peserta didik dapat memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi untuk bertahan hidup pada keadaan yang selalu berubah, tidak pasti, dan kompetitif (Depdiknas, 2006).

Ada lima tujuan pembelajaran matematika SD-MI/SMP-MTs/SMA-MA/SMK-MK menurut Standar Isi Mata Pelajaran Matematika (Depdiknas, 2006) yang harus tetap diacu para guru selama proses pembelajaran di kelas, yaitu:

1. Memahami *konsep* matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah
2. Menggunakan *penalaran* pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika
3. *Memecahkan masalah* yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh
4. *Mengomunikasikan* gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah

5. Memiliki *sikap* menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Tujuan pembelajaran matematika nomor 2 sangat relevan dengan pembicaraan artikel yang Anda baca saat ini. Kalimat pada tujuan nomor 2 tersebut, yaitu: "Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, ... " sangat erat kaitannya dengan proses pada penalaran induktif sedangkan kalimat: "... menyusun bukti, ... " sangat erat kaitannya dengan dengan proses penalaran deduktif. Sejalan dengan tujuan pembelajaran nomor 2 di atas, standar pembelajaran matematika dari NCTM yaitu organisasi para guru matematika di Amerika Serikat; telah menyatakan di bawah judul *reasoning* (penalaran) dan *proof* (pembuktian) bahwa program pembelajaran dari Taman Kanak-kanak (TK) sampai dengan Sekolah Menengah Atas (SMA) harus memfasilitasi siswa untuk:

- Mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek yang sangat mendasar dan penting di dalam matematika.
- Menyusun dan menginvestigasi dugaan-dugaan matematika.
- Mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian
- Memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran dan berbagai cara pembuktian.

Selama proses pembelajaran di kelas, pembuktian seperti $a^p \times a^q = a^{p+q}$; dapat ditunjukkan secara induktif maupun deduktif. Penggunaan penalaran induktif dapat ditunjukkan dengan contoh seperti:

$$a^2 \times a^3 = \underbrace{(a\times a)}_{\boxed{\text{Ada 2}}} \times \underbrace{(a\times a\times a)}_{\boxed{\text{Ada 3}}} = \underbrace{(a\times a\times a\times a\times a)}_{\boxed{\text{Ada (2 + 3)}}} = a^{2+3}$$

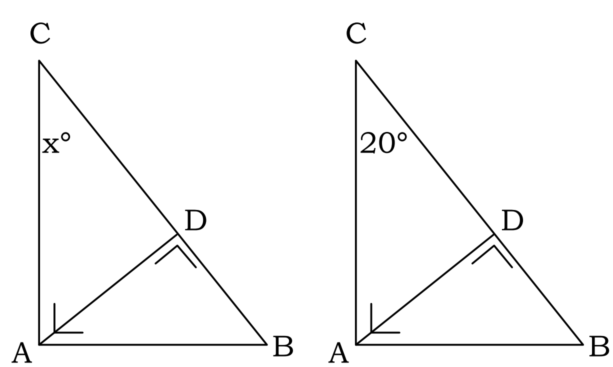
Namun sekali lagi, apakah kita yakin bahwa rumus akan benar untuk seluruh bilangan bulat m dan n; sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk umumnya adalah $a^m \times a^n = a^{m+n}$? Untuk itu digunakan pembuktian secara deduktif sebagai berikut.

$$a^m \times a^n = \underbrace{(a\times a\times a\times \ldots \times a)}_{\boxed{\text{Ada m}}} \times \underbrace{(a\times a\times \ldots \times a)}_{\boxed{\text{Ada n}}} = \underbrace{(a\times a\times a\times \ldots \times a)}_{\boxed{\text{Ada (m + n)}}} = a^{m+n}$$

Perhatikan bahwa m dan n mewakili sembarang bilangan asli. Seperti dinyatakan di bagian depan, pembuktian secara induktif tidak menunjukkan bahwa rumus akan benar untuk semua nilai pada bilangan asli. Kata lainnya, rumus hanya akan benar untuk beberapa nilai yang ditunjukkan pada pembuktian itu saja sehingga hasilnya tidak dapat disimpulkan untuk beberapa nilai lain di luar yang ditunjukkan tadi. Sebaliknya, pembuktian secara deduktif akan benar untuk seluruh nilai yang diwakili m dan n; yaitu untuk seluruh bilangan asli m dan n. Namun dari contoh di atas nampak jelas juga akan benarnya pendapat bahwa pembuktian secara induktif jauh lebih mudah, lebih real, dan lebih nyata bagi para siswa jika dibandingkan dengan pembuktian secara deduktif. Contohnya, perkalian 2 buah lambang a (yaitu: a×a) jauh lebih real (nyata) dari perkalian m buah a (yaitu: a×a×a× … ×a×a).

Dengan dua contoh pembuktian di atas, para siswa dapat difasilitasi untuk dapat memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran dan berbagai cara pembuktian. Tidak hanya itu, mereka harus dibimbing juga untuk mengetahui dan memahami kelebihan dan kekurangan penalaran induktif maupun penalaran deduktif. Mereka harus meyakini bahwa pembuktian secara deduktif merupakan cara terbaik yang harus digunakan untuk membuktikan. Namun sebelum melaksanakan pembuktian secara deduktif, kegiatan mencoba-coba dengan beberapa bilangan dapat digunakan dan harus didorong untuk digunakan para siswa pada tahap awal kegiatan. Alasannya, sekali lagi, bentuk seperti $a^2 \times a^3 = a^{2+3}$ jauh lebih mudah dan lebih nyata (*real*) bagi para siswa dari bentuk $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Pada akhirnya, melalui proses belajar membuktikan rumus maupun teorema, kemampuan bernalar dan berpikir para siswa Indonesia akan meningkat dengan tajam sehingga bangsa ini akan dapat bertahan hidup pada era yang selalu berubah, tidak pasti, dan kompetitif ini.

Contoh lain adalah untuk materi SMP berikut. Perhatikan segitiga siku-siku ABC di bawah ini. Dari titik A ditarik garis AD yang tegak lurus pada BC. Jika diketahui $\angle C = x°$ lalu siswa diminta untuk menentukan besar $\angle B$ dan $\angle BAD$, mudahkah bagi mereka untuk menemukan tugs tersebut? Akan lebih mudah jika diketahui $\angle C = 20°$. Karena $\angle A = 90°$ maka $\angle B = (90 - 20)° = 70°$ dan $\angle BAD = 20°$. Cara yang sama dapat digunakan jika diketahui $\angle C = 30°$, $\angle C = 40°$, $\angle C = 45°$, $\angle C = 70°$, $\angle C = 42°$, ataupun besar sudut lainnya. Ternyata, pada kasus ini dapat digeneralisasi bahwa besar $\angle C = \angle BAD$. Namun sekali lagi, generalisasi ini masih bersifat dugaan (*conjecture*) yang harus dibuktikan bahwa generalisisi itu berlaku berlaku untuk semua nilai x yang memenuhi. Pengetahuan tersebut dapat digunakan untuk menentukan besar $\angle B$ dan $\angle BAD$ jika $\angle C = x°$. Caranya, karena $\angle A = 90°$ maka $\angle B = (90 - x)°$ dan $\angle BAD = (90 - (90 - x))° = x°$.



Contoh di atas menunjukkan beberapa hal penting tentang penalaran (*reasoning*) yang pada dasarnya membahas tentang pembuktian (*justifying*) yang lebih bersifat penalaran deduktif dan generalisasi (*generalizing*) yang lebih bersifat penalaran induktif di samping memberikan kesempatan bagi siswa untuk belajar mengunakan simbol (*symbolizing*), mempresentasikan (*representing*), dan komunikasi (*communicating*) sebagaimana dinyatakan Brodie (2010:8) berikut: "*The literature suggests that there are two key practices involved in mathematical reasoning – justifying and generalizing – and other mathematical practices such as symbolizing, representing, and communicating, are key in supporting these.*" Demikian gambaran sekilas tentang pemnalaran; baik induktif maupun deduktif. Sebagaimana disampaikan di bagian depan, penalaran merupakan tujuan nomor dua pembelajaran matematika, yaitu: "Menggunakan *penalaran* pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika."

Daftar Pustaka

Brodie, K (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* Johannesburg: Springer

Depdiknas (2006). *Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Sekolah Menengah Atas.* Jakarta: Depdiknas.

Shadiq, Fadjar. (2003). *Peran Penalaran dan Komunikasi serta Pemecahan Masalah Selama Proses Pembelajaran Matematika dalam Peningkatan Kualitas Siswa.* Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: PPPG Matematika.